DS n°5 : continuité, dérivation, arithmétique

Durée : 4 heures. Calculatrices non autorisées.
Toute affirmation non triviale doit être justifiée.

Exercice 1

1) Montrer que $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire que pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a $1+\sqrt{ab} \leq \sqrt{1+a}\sqrt{1+b}$.

3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2f(x) \geq x + 2\ln 2$.

Exercice 2

1) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

2) En déduire $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin\theta)-\ln(\cos\theta)}{\sin\theta-\cos\theta}$.

Problème 1 : une équation de Mordell

On cherche à déterminer les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ qui vérifient l'équation (dite de Mordell) :

$$(\mathcal{M}) : \quad y^2 = x^3 + 16$$

On dit qu'un entier $a \in \mathbb{Z}$ est un *cube parfait* s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $a = n^3$.

1) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que a est pair si et seulement si a^2 est pair.

2) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que a est pair si et seulement si a^3 est pair.

3) Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ deux entiers premiers entre eux. Montrer que pour tout nombre premier p, on a $v_p(a) = 0$ ou $v_p(b) = 0$.

4) En déduire que si $a, b \in \mathbb{Z}$ sont premiers entre eux et que ab est un cube parfait, alors a et b sont des cubes parfaits. *Indication : on pourra partir de la décomposition de l'entier n tel que $ab = n^3$.*

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de $(\mathcal{M})$ tel que y soit impair.

5) Montrer que y^2 est impair et en déduire que x est impair.

6) Soit d un diviseur de $y-4$ et de $y+4$. Montrer que d divise 8, et que d est impair.

7) En déduire que $y-4$ et $y+4$ sont premiers entre eux.

8) En déduire qu'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $y+4 = u^3$ et $y-4 = v^3$.

9) Montrer que $u - v$ est pair et que $u^2 + uv + v^2$ est impair.

10) En factorisant $u^3 - v^3$, montrer que $u = v + 8$ et que $3v^2 + 24v + 64 = 1$.

11) Conclure en donnant l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ solutions de $(\mathcal{M})$ tels que y soit impair.

Problème 2 : fonctions absolument monotones

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ de classe C^∞. La fonction f est dite *absolument monotone* si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in]a, b[\qquad f^{(n)}(x) \geq 0$$

Partie A : généralités

1) Montrer que toute application absolument monotone est positive, croissante et convexe. Donner un exemple d'application absolument monotone décroissante.

2) Soit f, g deux fonctions absolument monotones sur $]a, b[$. Montrer que $f + g$ et fg le sont aussi.

3) Dans la suite, on note e^f l'application $x \mapsto e^{f(x)}$. Calculer $(e^f)'$.

4) En utilisant une récurrence forte et le fait que $(e^f)^{(n+1)} = ((e^f)')^{(n)}$, montrer que si f est absolument monotone sur $]a, b[$, alors e^f l'est aussi.

Partie B : la fonction arcsinus est absolument monotone sur $]0, 1[$

5) On pose $u : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, 1[$

$$u^{(n)}(x) = \alpha_n \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

où α_n est un réel qui dépend de n que l'on précisera.

6) Donner sans justification une formule pour $v^{(n)}(x)$, où $v : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

7) En déduire que l'application $g :]0, 1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right)$$

est absolument monotone sur $]0, 1[$.

8) Montrer que l'application $h :]0, 1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

est absolument monotone sur $]0, 1[$. *On pourra considérer $f = \ln h$ et calculer f'.*

9) En déduire que l'application arcsin est absolument monotone sur $]0, 1[$.

Partie C : prolongement d'une application absolument monotone

On suppose que $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est absolument monotone sur $]a, b[$.

10) Montrer que f est prolongeable par *continuité* en a. On note $\tilde{f} : [a, b[\to \mathbb{R}$ ce prolongement continu. Montrer également que $\tilde{f}(a) \geq 0$.

11) Justifier que $\tilde{f}'$ admet une limite en a. En déduire que $\tilde{f}$ est dérivable en a et que $\tilde{f}'(a) \geq 0$.

12) Est-ce que f est prolongeable par continuité en b ?